具有任意正则阶的M2带对称正交小波设计

张增辉[1], 成礼智[2]
(1l 国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073;
2l 国防科技大学理学院数学与系统科学系, 湖南长沙 410073)

摘 要: 利用计算代数中Grobner基与合冲模的概念与算法, 论文提出了一种多相位矩阵的正交化方法, 在此基础上得到了同时具有对称性和任意正则阶的M2带正交小波的高效设计方法. 克服了现有算法构造过程复杂以及不能保持线性相位的缺陷, 另外, 当所求得的尺度滤波器系数为参数形式时, 本文算法求得的小波滤波器也为含参数的, 因而可以根据实际问题灵活选取适当参数从而得到所需要的M2带小波系统.

关键词: 多带正交小波; 参数; Grobner 基; 合冲模
中图分类号: TN911 文献标识码: A 文章编号: 037222112 (2004) 0721094205

The Design of M2Band Symmetric Orthogonal Wavelets with Arbitrary Regularity

ZHANG Zeng2hui[1], CHENG Li2zhi[2]
(1l Electronic Scienceand Englneering School, NationalUniversity ofDefense Technology, Changsha, Hunan 410073, China;
2l Science School, National University ofDefense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: Using the concepts and algorithms related to Grobner basis and syzygy module in computing algebra, we propose or2 thogonalized approach for the polyphase matrix, and symmetric orthogonal M2band wavelets with arbitrary regularity are achieved. The drawbacks that the computational process of the existing methods is complicated and linear2phase can not be achieved are avoided. Furthermore, the presented wavelet filters contains free variables when the associated scale filter coefficients involve parameters. There2 fore, M2band wavelets with free variables via practice requirement is also developed.

Key words: M2band orthogonal wavelets; parameter; Grobner basis; syzygy module

1 引言

小波变换[1,2]作为新型的信号分析数学工具, 克服了传统Fourier变换不能有效同时分析信号的时间2频率局部特性的缺陷, 因而被广泛应用于信号和信息处理的各个领域. 目前, 国际上对小波变换理论、算法的讨论主要集中在两带小波上. 两带小波具有良好的低频能量集中特性, 但是对于中) 高频少数频带含有大量信息的信号而言, 分析效果大为降低. 此外, 已经证明: 除开最简单的Haar小波外, 不存在保持线性相位(系数对称)的其它两带正交小波, 而线性相位性质对于图像处理中的图像不失真具有重要作用. 为了克服两带小波的上述缺陷, 1993 年, Steffen 等[3]系统研究了M2带正交小波的构造理论与方法. 对于M2带正交小波而言, 当 M> 3 时的M2带线性相位正交小波恒存在, 而M2带小波可以更加精确地表示信号在各种不同频带上的分量信息.

目前, M2带正交小波设计的方法主要有两种. 第一种方法[4]是基于格型结构(Lattice structure)的, 该方法将正则阶条件引入正交线性相位系统的格型结构中, 得到格型结构中参数的限制条件, 然后求解一个约束优化问题. 文[4]中给出了 2 阶正则阶时参数满足的条件, 该条件比较复杂. 并且随着正则阶的增加, 相应的限制条件会越来越复杂, 求解变得非常困难. 第二种方法[3,6]则通过构造出尺度滤波器, 然后在正则阶限制以及正交完全重构的条件下构造其余M21个小波滤波器. 但是, 第二种方法采用正交化过程无法保证得到的小波滤波器是线性相位的.

本文在已知M2带尺度滤波器的条件下, 利用计算代数中的Grobner基以及合冲模(syzygy module)的概念与算法, 提出了具有任意正则阶且保持线性相位性质的M2带正交小波的有效构造方法, 克服了现有方法求解过程过于复杂、无法保持线性相位的缺陷.

收稿日期: 2003205210; 修回日期: 2004202218
基金项目: 国家自然科学基金(No.10171109)

2　预备知识

为了建立M2带线性相位正交小波的构造方法, 需要引入一系列关于M2带线性相位滤波器和计算代数中合冲模的概念与算法. 对于M2带滤波器系统而言, 下面两个结论成立.

命题1[8]　设$H_k(z)$是第k个线性相位的分析滤波器, 其长度为$L_k= n_kM+ B+ 1$, 那么它的多相位元$E_{k,l}(z)$, $l= 0, , , M- 1$满足

$$E_{k,l}(z) = \begin{cases} ?\ z^{n_k}E_{k,B-l}(z^{-1}), & l= 0, , , B \\ ?\ z^{n_k-1}E_{k,M+B-l}(z^{-1}), & l= B+ 1, , , M- 1 \end{cases}$$

命题2[5]　对于长度为$L_i= n_iM+ B+ 1$的M2带线性相位完全重构滤波器系统有

(1) 若M, B分别是偶的和奇的, 那么滤波器中M/2个对称和M/2个反对称;

(2) 若M, B均是偶的, 那么滤波器中M/2+ 1个对称和M/2- 1个反对称;

(3) 若M是奇的, 那么滤波器中(M+ 1)/2个对称和(M- 1)/2个反对称.

定义1[7]　设$f_1, , , f_s$ I A^m, m @s 矩阵$F= [f_1, , , f_s]$的一个合冲(syzygy)是满足$h_1f_1+ h_2f_2+ , + h_sf_s= 0$的向量$(h_1, , , h_s)$ I A^s, 其中A为Noetherian环$k[x_1, , , x_n]$. 所有合冲的集合称为F的合冲模, 用$Syz(f_1, , , f_s)$或$Syz(F)$表示.

设$f_1= (f_{1,1}, , , f_{m,1})^T, , , f_s= (f_{1,s}, , , f_{m,s})^T$, 合冲模$Syz(f_1, , , f_s)$为与m个向量$(f_{1,1}, , , f_{1,s}), , , (f_{m,1}, , , f_{m,s})$相正交的向量的集合. 合冲模$Syz(f_1, , , f_s)$的计算通过两步来完成. 第一步: 计算3$f_1, , , f_s$4 A A^m的Grobner基$\{g_1, , , g_l\}$, 得到$\{g_1, , , g_l\}$的合冲模为$Syz(g_1, , , g_l)= 3\, s_1, , , s_t4$; 第二步: 由Buchberger算法和多项式的长除法可知, 对于矩阵$F= [f_1, , , f_s]$和$G= [g_1, , , g_l]$, 存在l @s的矩阵S和s @l的矩阵T使得$F= GS$, $G= FT$. 设矩阵$I_s- TS$的列向量为: $r_1, , , r_s$. 于是$Syz(f_1, , , f_s)= 3\, Ts_1, , , Ts_r, r_1, , , r_s4$.

3　基于合冲模的M2带对称正交小波的设计

引理1　设多项式$f_1(x), , , f_m(x)$满足$f_1(x)f_1(x^{-1})+ , + f_m(x)f_m(x^{-1})= 1$, 并且存在一个i, 1F iF m, 使得$f_i(x)$的常数项不为零. 那么它们的Grobner基为{1}.

证明　容易看出$f_1(x), , , f_m(x)$是互素的. 若不然他们的最大公因式$g(x)$必定满足$g(x)|x^d$, 其中$d= \max\limits_{1F iF m}\{deg(f_i(x))\}$. 而$f_i(x)$的常数项不为零, 并且$g(x)|f_i(x)$, 所以必定有$g(x)= 1$. 从而$f_1(x), , , f_m(x)$互素, 那么他们的Grobner基为{1}.

由上述引理和合冲模的算法容易得到下面的结论:

定理1　设$F(x)= [f_1(x), , , f_m(x)]$为k @m的矩阵且满足$F(x)F^T(x^{-1})= I_k$, 并且存在一个i, 1F iF m, 使得$f_i(x)$的常数项不为零. 那么, 存在m @k的矩阵$T(x)$使得$F(x)T(x)= I_k$成立. 特别的, 设矩阵$I_m- T(x)F(x)$的列向量为: $r_1, , , r_m$, 则有$Syz(f_1(x), , , f_m(x))=3\, r_1, , , r_m4$.

证明　多项式向量$f_1(x), , , f_m(x)$满足条件$F(x)F^T(x^{-1})= I_k$, 类似于引理1的证明可得它们的Grobner基为$\{e_1, , , e_k\}$, 其中$I_k= [e_1, , , e_k]$, 即$G= I_k$. 那么, 由合冲模的概念可知$Syz(G)= 0$. 根据合冲模的计算方法存在m @k的矩阵$T(x)$使得$F(x)T(x)= I_k$, 并且$S= F$, 所以$f_1(x), , , f_m(x)$的合冲模为

$$Syz(f_1(x), , , f_m(x)) = 3\, r_1, , , r_m4$$

其中, $r_1, , , r_m$为矩阵$I_m- T(x)F(x)$的列向量.

利用定理1, 下面讨论M2带正交小波的构造方法.

设已知M带正交小波滤波器系统多相位矩阵$E(z)$的前k行为

$$\begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{0,1}(z) & , & H_{0,M-1}(z) \\ H_{1,0}(z) & H_{1,1}(z) & , & H_{1,M-1}(z) \\ , & , & , & , \\ H_{k-1,0}(z) & H_{k-1,1}(z) & , & H_{k-1,M-1}(z) \end{bmatrix}$$

由正交性质, 第k+ 1行$[H_{k,0}(z)\quad H_{k,1}(z)\quad ,\quad H_{k,M-1}(z)]$满足

$$[H_{i,0}(z)\quad ,\quad H_{i,M-1}(z)][H_{k,0}(z^{-1})\quad ,\quad H_{k,M-1}(z^{-1})]^T = 0,\qquad i= 0, 1, , , k- 1 \tag{1}$$

对上式两边同时乘以z^{d_0}以保证$z^{d_0}H_{k,l}(z^{-1})$, $l= 0, , , M- 1$均为z的多项式. 设$f_i(z)= [H_{0,i}(z)\quad H_{1,i}(z)\quad ,\quad H_{k-1,i}(z)]^T$, $i= 0, 1, , , M- 1$, 则式(1)等价于

$$f_0(z)z^{d_0}H_{k,0}(z^{-1})+ , + f_M(z)z^{d_0}H_{k,M-1}(z^{-1})= 0$$

由合冲模的概念得到

$$z^{d_0}[H_{k,0}(z^{-1})\quad ,\quad H_{k,M-1}(z^{-1})] \text{ I } Syz(f_0(z), , , f_{M-1}(z)) \tag{2}$$

而由$E(z)$的正交性又有

$$[f_0(z)\quad f_1(z)\quad ,\quad f_{M-1}(z)][f_0^T(z^{-1})\quad f_1^T(z^{-1})\quad ,\quad f_{M-1}^T(z^{-1})]^T= I_k$$

设$F(z)= [f_0(z)\quad f_1(z)\quad ,\quad f_{M-1}(z)]$, 由定理1可得

$$Syz(f_0(z), , , f_{M-1}(z)) = 3\, r_0(z), , , r_{M-1}(z)4$$

其中, $r_0(z), , , r_{M-1}(z)$为矩阵$I_M- T(z)F(z)$的M个列向量, 以及$T(z)$满足$F(z)T(z)= I_k$.

对于多项式$r_0(z), , , r_{M-1}(z)$, 求出其Grobner基为: $t_0(z), , , t_q(z)$, 于是有3$r_0(z), , , r_{M-1}(z)$4= 3$t_0(z), , , t_q(z)$4, 结合式(2)表明

$$z^{d_0}[H_{k,0}(z^{-1})\quad ,\quad H_{k,M-1}(z^{-1})] \text{ I } 3\, t_0(z), , , t_q(z)4 \tag{3}$$

令$t_i(z)= z^{d_1}t_i(z^{-1})$, $i= 0, 1, , , q$, 其中d_1 I N的选取使得$t_i(z)$, $i= 0, 1, , , q$均为多项式. 由式(3)可知$[H_{k,0}(z)\quad ,\quad H_{k,M-1}(z)]$ I 3$t_0(z), , , t_q(z)$4, 即多相位矩阵第k+ 1行$E_k(z)$可以表示为系数为多项式的$t_0(z), , t_q(z)$的线性组合, 设为

$$E_k(z)= A_0(z)t_0(z)+ , + A_q(z)t_q(z) \tag{4}$$

其中　$A_i(z)= c_{i,0}+ c_{i,1}z+ , + c_{i,r}z^r$, $i= 0, 1, , , q$.

又设$t_i(z)= [t_{i,0}(z)\quad t_{i,1}(z)\quad ,\quad t_{i,M-1}(z)]$, $i= 0, 1, , , q$, 则式(4)的分量表示为

$$E_{k,l}(z)= A_0(z)t_{0,l}(z)+ A_1(z)t_{1,l}(z)+ , + A_q(z)t_{ql}(z)$$

$$= \mathop{E}_{i=0}^{q} A_i(z)t_{il}(z)= \mathop{E}_{i=0}^{q}\mathop{E}_{j=0}^{r} c_{ij}z^jt_{il}(z)$$

当$E_k(z)$满足线性相位条件的情况下, 由命题1得

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} c_{i,j}z^{j}t_{i,l}(z) = ?\ z^{n_l}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} c_{i,j}z^{j}t_{i,B-l}(z), \\ \qquad l=0, , , B \\ \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} c_{i,j}z^{j}t_{i,l}(z) = ?\ z^{n_l-1}\sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} c_{i,j}z^{j}t_{i,M+B-l}(z), \\ \qquad l=B+1, , , M-1 \end{cases} \tag{5}$$

上述方程组为变量 $\{c_{i,j}, i=0, , , q; j=0, , , r\}$ 的线性方程组, 由于一般情况下方程个数少于变量数, 因此方程组的解含参数. 求解式(5)得到与多相位矩阵的前 k 行 $E_0(z), , , E_{k-1}(z)$ 相正交的且具有线性相位性质的第 k+1 行 $E_k(z)$. 最后再利用 $E_k(z)E_k^T(z^{-1})=1$, 求解相应的参数即可得到正交多相位矩阵的第 k+1 行.

综上所述, 求解具有正则阶 N 的M2带对称正交小波的算法可以描述为:

第一步　求解具有 N 阶正则阶的M2带对称正交尺度滤波器(例如, 可采用文献[9]中算法)以构造多相位矩阵 $E(z)$ 的第一行;

对于 $k=1, 2, , , M-1$ 递推地进行如下操作:

第二步　设矩阵 $E(z)$ 的前 k 行已知, 即已知矩阵 F, 求第 k+1 行的算法为

(1) 利用 Euclidean 多项式除法求出矩阵 T, 使之满足 $FT=I_k$. 并计算矩阵 I_M-TF, 设它的 M 个列向量为 $r_0(z), , , r_{M-1}(z)$;

(2) 利用文献[7]中算法求出多项式组 $r_0(z), , , r_{M-1}(z)$ 的Grobner 基为 $t_0(z), , , t_q(z)$;

(3) 令 $E_k(z)=A_0(z)t_0(z)+ , + A_q(z)t_q(z)$, 其中 $t_i(z)=z^{d_i}t_i(z^{-1})$, $i=0, 1, , , q$ 以及 $A_i(z)=c_{i,0}+c_{i,1}(z)+ , + c_{i,r}z^r$, $i=0, 1, , , q$. 求解方程组(5), 得到 $E_k(z)=E_k(z)(s_1, s_2, , , s_p)$;

(4) 利用 $E_k(z)E_k^T(z^{-1})=1$ 求解参数 $s_1, s_2, , , s_p$, 即可得到线性相位的M2带小波多相位矩阵的第 k+1 行.

第三步　当 k+1=M 时, 算法终止, 否则, 回代到第二步.

下面以32带对称正交小波的构造为例说明上述算法过程, 更一般的M2带对称正交小波设计原理与之完全相同.

第一步　利用文[9]中的算法, 首先构造 3 带具有 2 阶正则阶的对称正交尺度滤波器为

$$H_0(z) = -\frac{1}{81}-\frac{4}{81}z+\frac{8}{81}z^2+\frac{20}{81}z^3+\frac{35}{81}z^4+\frac{20}{81}z^5+\frac{8}{81}z^6 -\frac{4}{81}z^7-\frac{1}{81}z^8$$

对应的多相位元表示为

$$E_0(z)=\left[-\frac{1}{81}+\frac{20}{81}z+\frac{8}{81}z^2 \quad -\frac{4}{81}+\frac{35}{81}z-\frac{4}{81}z^2 \quad \frac{8}{81}+\frac{20}{81}z-\frac{1}{81}z^2\right]$$

由命题 2 可知, 其余的两组滤波器分别为对称和反对称的.

第二步　求解多相位矩阵的第二行

设 $f_0^{(0)}(z)=-\frac{1}{81}+\frac{20}{81}z+\frac{8}{81}z^2$, $f_1^{(0)}(z)=-\frac{4}{81}+\frac{35}{81}z-\frac{4}{81}z^2$, $f_2^{(0)}(z)=\frac{8}{81}+\frac{20}{81}z-\frac{1}{81}z^2$, 利用计算合冲模的算法得到 $\mathrm{Syz}(f_0^{(0)}(z), f_1^{(0)}(z), f_2^{(0)}(z)) = 3t_0^{(0)}(z), t_1^{(0)}(z)4$,

其中
$$\begin{cases} t_0^{(0)}(z)=[-24, 8-5z, 1+20z]^T \\ t_1^{(0)}(z)=[-92+5z, 39, 8+40z]^T \end{cases}$$

设 $E_1^T(z^{-1})=(a+bz)t_0^{(0)}(z)+(c+dz)t_1^{(0)}(z)$, 限制 $E_1(z)$ 是对称的, 可以得到参数 a, b, c, d 应该满足的线性方程组为

$$\begin{cases} -24a-92c=20b+40d \\ -24b+5c-92d=20a+b+40c+8d \\ 5d=a+8c \\ 8a+39c=-5b \end{cases}$$

此方程组的解含有两个参数

$$a=-8u+5v, b=5u-8v, c=u, d=v$$

因此, 与 $E_0(z)$ 相正交的同时具有对称性质的多相位矩阵的第二行的一般形式为

$$E_1(z)=\begin{bmatrix} (100u-120v)z^2+(100v-115u)z+5v \\ (-25u+40v)z^2+(80u-50v)z+(40v-25u) \\ 5vz^2+(100v-115u)z+(100u-120v) \end{bmatrix}^T$$

结合 $E_1(z)E_1^T(z^{-1})=1$, 求解得到参数 $u=2\sqrt{6}/405$, $v=1/27\sqrt{6}$, 因此

$$E_1(z)=\left[\frac{1}{160}(5+8z-40z^2), \frac{1}{80}(10+7z+10z^2), \frac{1}{160}(-40+8z+5z^2)\right]$$

第三步　求解多相位矩阵的第三行:

设

$$f_0^{(1)}(z)=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{81}+\frac{20}{81}z+\frac{8}{81}z^2 \\ \frac{1}{160}(5+8z-40z^2) \end{Bmatrix}, \quad f_1^{(2)}(z)=\begin{Bmatrix} -\frac{4}{81}+\frac{35}{81}z-\frac{4}{81}z^2 \\ \frac{1}{80}(10+7z+10z^2) \end{Bmatrix}, \quad f_2^{(1)}(z)=\begin{Bmatrix} \frac{8}{81}+\frac{20}{81}z-\frac{1}{81}z^2 \\ \frac{1}{160}(-40+8z+5z^2) \end{Bmatrix}$$

利用计算合冲模的算法得到 $\mathrm{Syz}(f_0^{(1)}(z), f_1^{(1)}(z), f_2^{(1)}(z)) = 3t_0^{(1)}(z)4$, 其中

$$t_0^{(1)}(z)=[-8-z^2, 4-4z^2, 1+8z^2]^T$$

可以验证, $[t_0^{(1)}(z^{-1})]^T t_0^{(1)}(z)=\mathrm{const}$, 因此得到

$$E_2(z)=[-8z^2-1, 4z^2-4, z^2+8]$$

最后通过归一化得到 3 带具有 2 阶正则阶的对称正交小波滤波器的多相位矩阵为:

$$E(z)=\begin{bmatrix} \frac{-1+20z+8z^2}{27\sqrt{3}} & \frac{-4+35z-4z^2}{27\sqrt{3}} & \frac{8+20z-z^2}{27\sqrt{3}} \\ \frac{5+8z-40z^2}{27\sqrt{6}} & \frac{1}{27}\sqrt{\frac{2}{3}}(10+7z+10z^2) & \frac{-40+8z+5z^2}{27\sqrt{6}} \\ -\frac{1+8z^2}{9\sqrt{2}} & \frac{2\sqrt{2}}{9}(-1+z^2) & \frac{1+8z^2}{9\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

4　含参数的M2带对称正交小波设计

当尺度滤波器具有参数形式的时候, 利用合冲模和Grob2ner基作为工具, 类似地可以设计含有参数的M2带对称正交小波. 当M2带尺度滤波器是关于参数的非线性形式时, 应首先通过变量替换等手段, 把它表示成关于参数的多项式形式, 然后再利用合冲模和Grobner基作为工具设计对称正交小波. 相应的算法为:

第一步　求解含有参数形式的具有N阶正则阶的M带对称正交尺度滤波器(可采用文献[9]中算法)以构造多相位矩阵$E(z)$的第一行. 并且通过变量替换等技术, 把$E(z)$的第一行表示为参数的多项式形式;

对于$k=1,2,\cdots,M-1$递推地进行如下操作:

第二步　设$E(z)$的前k行已知, 即已知矩阵F, 求第$k+1$行的算法为

(1) 设$F=[f_1(z),\cdots,f_M(z)]$, 利用文献[7]中关于合冲模的算法得到$Syz(f_1(z),\cdots,f_M(z))=\{s_0(z),\cdots,s_p(z)\}$;

(2) 利用文献[7]中算法求出多项式组$s_0(z),\cdots,s_p(z)$的Grobner基为$t_0(z),\cdots,t_q(z)$;

(3) 令$E_k(z)=A_0(z)t_0(z)+\cdots+A_q(z)t_{t_q}(z)$, 其中$t_i(z)=z^{d_i}t_i(z^{-1})$, $i=0,1,\cdots,q$以及$A_i(z)=c_{i,0}+c_{i,1}z+\cdots+c_{i,r}z^r$, $i=0,1,\cdots,q$. 求解方程组(5), 得到$E_k(z)=E_k(z)(s_1,s_2,\cdots,s_p)$;

(4) 利用$E_k(z)E_k^T(z^{-1})=1$消去$s_1,s_2,\cdots,s_p$中的多余参数, 即可得到含有参数的M2带对称正交小波多相位矩阵的第$k+1$行.

第三步　当$k+1=M$时, 算法终止, 否则, 回代到第二步.

下面以42带含参数镜像对称正交小波为例说明算法过程:

第一步　利用文献[7]中的方法构造出42带含参数的尺度滤波器系数为

$$\begin{cases} h_0(0)=h_0(7)=\dfrac{u}{8}\quad h_0(1)=h_0(6) \\ \qquad\qquad =\dfrac{1}{8}(-2+\sqrt{4-4u-u^2}) \\ h_0(2)=h_0(5)=\dfrac{1}{8}(-2-\sqrt{4-4u-u^2}) \\ h_0(3)=h_0(4)=\dfrac{1}{8}(-4-u) \end{cases}$$

令$v=\sqrt{4-4u-u^2}$, 从而把尺度滤波器化为关于参数的多项式形式为

$$H_0(z)=\frac{u}{8}+\frac{-2+v}{8}z^{-1}-\frac{2+v}{8}z^{-2}-\frac{u+4}{8}z^{-3}-\frac{u+4}{8}z^{-4}-\frac{2+v}{8}z^{-5}+\frac{-2+v}{8}z^{-7}+\frac{u}{8}z^{-8}$$

由于滤波器是镜像对称的, 因此可得多相位矩阵的两行为式(6).

第二步　令$F(z)=[f_1(z)\quad f_2(z)\quad f_3(z)\quad f_4(z)]$, 利用文献[7]中关于合冲模和Grobner基的算法得到$Syz(f_1(z),\cdots,f_4(z))=\{r_0(z),r_1(z)\}$, 其中

$$\begin{cases} r_0(z)=[0\quad -256-64u+64uz\quad 0\quad 128-64v+128z+64vz]^T \\ r_1(z)=[-16-8v-16z+8vz\quad 0\quad -8u+32z+8uz\quad 0]^T \end{cases}$$

设多相位矩阵第三行的转置共厄为$ar_0(z)+br_1(z)$, 利用第三行具有反对称形式, 求解相应的线性方程组可得$a=8b$, 再利用归一化条件求得$b=1/512$, 最后求得多相位矩阵的第三行为:

$$\left[\frac{1}{8}(-2+v)-\frac{1}{8}(2+v)z\quad \frac{u}{8}-\frac{1}{8}(4+u)z\quad \frac{1}{8}(4+u)-\frac{u}{8}z\quad \frac{1}{8}(2+v)-\frac{1}{8}(-2+v)z\right]$$

因此, 最终得到42带含参数对称正交小波系统的多相位矩阵为式(7).

$$F(z)=\begin{bmatrix} \frac{1}{8}u-\frac{1}{8}(4+u)z & \frac{1}{8}(-2+v)-\frac{1}{8}(2+v)z & -\frac{1}{8}(2+v)+\frac{1}{8}(-2+v)z & -\frac{1}{8}(4+u)+\frac{1}{8}uz \\ \frac{1}{8}u-\frac{1}{8}(4+u)z & -\frac{1}{8}(-2+v)+\frac{1}{8}(2+v)z & -\frac{1}{8}(2+v)+\frac{1}{8}(-2+v)z & \frac{1}{8}(4+u)-\frac{1}{8}uz \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$E(z)=\begin{bmatrix} \frac{1}{8}u-\frac{1}{8}(4+u)z & \frac{1}{8}(-2+v)-\frac{1}{8}(2+v)z & \frac{1}{8}(2+v)+\frac{1}{8}(-2+v)z & -\frac{1}{8}(4+u)+\frac{1}{8}uz \\ \frac{1}{8}u-\frac{1}{8}(4+u)z & -\frac{1}{8}(-2+v)+\frac{1}{8}(2+v)z & -\frac{1}{8}(2+v)+\frac{1}{8}(-2+v)z & \frac{1}{8}(4+u)-\frac{1}{8}uz \\ \frac{1}{8}(-2+v)-\frac{1}{8}(2+v)z & \frac{u}{8}-\frac{1}{8}(4+u)z & \frac{1}{8}(4+u)-\frac{u}{8}z & \frac{1}{8}(2+v)-\frac{1}{8}(-2+v)z \\ \frac{1}{8}(-2+v)-\frac{1}{8}(2+v)z & -\frac{u}{8}+\frac{1}{8}(4+u)z & \frac{1}{8}(4+u)-\frac{u}{8}z & -\frac{1}{8}(2+v)+\frac{1}{8}(-2+v)z \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中, $v=\sqrt{4-4u-u^2}$.

特别地选取$u=0$, 多相位矩阵为

$$E(z)=\begin{bmatrix} -\frac{z}{2} & -\frac{z}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{z}{2} & \frac{z}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{z}{2} & -\frac{z}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{z}{2} & \frac{z}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

即为42带Harr小波(当$u=-4$时也可以得到42带Harr小波).

5　结论

本文利用计算代数中Grobner基以及合冲模作为工具通过对多相位矩阵的正交化, 给出了M2带正交小波的一般性设计算法, 利用该算法可以得到同时具有对称性和任意正则阶的M2带正交小波. 在不考虑多相位矩阵归一化的前提下, 算法实现只需用到求解多项式最大公因式的Euclidean算法与

Grobner 基求解算法. 特别的, 当所求得的尺度滤波器为关于某个参数的多项式形式时, 利用该算法求得的小波滤波器也为含参数的, 因而可以根据实际问题中的不同要求适当选取参数得到不同的小波系统.

参考文献:

[1] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm Pure Appl Math., 1988, 41(7): 909- 996.

[2] Mallat S G. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. IEEE Trans, 1989, PAMI211(7): 674-693.

[3] P Steffen, P N Heller, R A Gopinath, C S Burrns. Theory of regular M2band wavelet bases[J]. IEEE Trans, 1993, SP241(12): 3497- 3510.

[4] S Oraintara, T D Tran, P N Heller, T Q Nguyen. Lattice structure for regular paraunitary linear2phase filterbanks and M2band orthogonal symmetric wavelets[J]. IEEE Trans, 2001, SP249(11): 2659- 2672.

[5] A K Soman, P P Vaidyanathan, T Q Nguyen. Linear phase paraunitary filter banks: Theory, factorizations and designs[J]. IEEE Trans, 1993, SP241(12): 3480- 3495.

[6] W Lawton, S L Lee, Z Shen. An algorithm for matrix extension and wavelet construction[J]. Math Computation, 1996, 65(4): 723- 737.

[7] W W Adams, P Loustaunau. Introduction to Grobner Bases[M]. Provi2dence, R I USA: Graduate Studies in Mathematics, American Mathe2matical Society, 1994.

[8] S BaSu H M Choi. Hermite reduction methods for generation of a com2plete class of linear2phase perfect reconstruction filter banks2part I: the2ory[J]. IEEE Trans Circults and System) Ò Analog and Digtal Signal Processing, 1999, 46(4): 434- 447.

[9] E Belogay, Y Wang. Compactly supported onthogonal symmetric scaling functions[J]. Appl Compput Harmon Anal, 1999, 7(2): 137- 150.

作者简介:

张增辉 男, 1980 年 5 月生于山东济宁, 国防科技大学电子科学与工程学院博士研究生, 研究方向为小波与滤波器理论及其在图像压缩, 模式识别, 数字水印等领域中的应用. Email: zenghui1980@hotmail.com

成礼智 男, 1963 年出生于湖南常德, 国防科技大学理学院数学与系统科学系教授, 博士生导师, 已出版专著三部, 在国内外有影响的期刊上发表论文 80 余篇, 其中 SCI 检索 20 余篇. 研究领域为快速算法与并行算法, 小波理论及其在图像压缩, 视频处理, 数字水印等领域中的应用.